Corso di Laurea in Fisica, Analisi 1 19-20
Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi
Esercitazione 5

Esercizio 1 Dire se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n=N}^{+\infty} 3^n < +\infty.$$

Esercizio 2 Discutere il carattere delle seguenti serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^n + n^2}\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3n+8}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n^2+n)^n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n}-1)^n\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$$

$$,\qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}\,, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\log n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha}}$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza assoluta delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2) \sin\left(\frac{1}{2^n}\right), \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^4+1}$$

Tali serie convergono semplicemente?

Esercizio 4 Discutere, al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice e assoluta delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Esercizio 5 Discutere al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a^n}{a^n+2} \quad a \neq -2, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n - n!}{(na^2)^n + e^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{(-1)^n}{n(\log n)^a} \quad k \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[1+(-1)^n a]^n}{2^n \sqrt{n^3+1}}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n a^n}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n a^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)a^n}{n!}$$

Esercizio 6 Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergenti, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ per ogni n. Dimostrare che

$$\sum_n a_n b_n < +\infty.$$

Esercizio 7 Trovare due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ convergenti, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ per ogni n, e tali che

$$\sum_n a_n b_n < \left(\sum_n a_n\right)\left(\sum_n b_n\right).$$

Esercizio 8 Sia $a_n \geq 0$ per ogni n. Dire se è vero che $\sum_n (a_n)^2$ convergente $\Rightarrow \sum_n a_n$ convergente.

Esercizio 9 **i.** Dimostrare la disuguaglianza

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

ii. Utilizzando **i.**, dimostrare che se le serie $\sum_n (a_n)^2$ e $\sum_n (b_n)^2$ sono convergenti, allora anche la serie $\sum_n a_n b_n$ è convergente.

Esercizio 10 Provare che se la serie a termini positivi $\sum_n a_n$ è convergente, allora lo è la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

Esercizio 11 Date $\{a_n\}$ una successione infinitesima e $\sum_n b_n$ una serie assolutamente convergente, provare che la serie $\sum_n a_n b_n$ è una serie convergente.

Esercizio 12 Trovare una successione non monotona a_n, con $a_n > 0$ per ogni n, tale che la serie $\sum_n a_n$ converga.

Esercizio 13 Sia $\{a_k\}$ una successione. Supponiamo che

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S \in \mathbb{R} \quad \text{e che} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = +\infty.$$

Allora necessariamente si ha

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^+ = +\infty \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^- = +\infty,$$

dove a_k^+ e a_k^- sono rispettivamente la **parte positiva** e la **parte negativa** di a_k, così definite: se $x \in \mathbb{R}$ allora $x^+ = \max\{x, 0\}$ e $x^- = \max\{-x, 0\}$. È facile vedere che $x = x^+ - x^-$ e $|x| = x^+ + x^-$.

Esercizio 14 Sia a_n decrescente e infinitesima. Allora, essendo $a_{2^{n+1}} \leq a_k \leq a_{2^n}$ per ogni k tale che $2^n \leq k \leq 2^{n+1}$, dedurre che le due serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere.

Esercizio 15 Utilizzando l'esercizio precedente dedurre che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge positivamente se $\alpha \leq 1$.

Esercizio 16 Trovare due successioni a_n, b_n, con $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ tali che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, b_n\} < +\infty.$$

Esercizio 17 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione.

1. Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima, allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

2. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, allora $\{|a_n|^{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ converge, allora esiste $0<\alpha<1$ tale che definitivamente $|a_n|\leq\alpha^n$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

4. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge assolutamente, allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$ converge assolutamente. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 18 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione, e ricordiamo che $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}=+\infty$, $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ converge.

1. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_{4k}$ converge; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

2. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ converge, allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}$ converge; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{2k}|$ converge, allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

4. Se $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k}$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}$ convergono, allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 19 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione e sia $S_n:=\sum_{k=1}^{n}a_n$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ l'elemento ennessimo della corrispondente successione delle somme parziali.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge se e solo se $S_{n+1}-S_n\to 0$ per $n\to+\infty$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

2. Se $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, m\in\mathbb{N}:\ |S_{n+h}-S_n|\leq\varepsilon$ per ogni $n\geq m$, $h\in\mathbb{N}$, allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. Se S_n è limitata superiormente, allora $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge assolutamente; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

4. Se S_n è monotona decrescente e $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge, allora converge assolutamente. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 20 Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione positiva (ossia $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

1. Se esiste una sottosucessione $\{a_{k_n}\}$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k_n}^{\frac{1}{n}} = 2$, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

2. Se esiste una sottosucessione $\{a_{k_n}\}$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{k_n+1}}{a_{k_n}} = 2$, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty$; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. Se per ogni sottosucessione $\{a_{k_n}\}$ si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k_n}^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge; $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

4. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n^{\frac{1}{n}} < 1$, allora $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$